На правах рукописи

Сидоров Вадим Вениаминович

ИЗОМОРФИЗМЫ РЕШЕТОК ПОДАЛГЕБР ПОЛУКОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2011

Работа выполнена на кафедре алгебры и дискретной математики факультета информатики, математики и физики Вятского государственного гуманитарного университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Вечтомов Евгений Михайлович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Пыткеев Евгений Георгиевич;
	кандидат физико-математических наук, доцент Ильин Сергей Николаевич.
Ведущая организация:	Ульяновский государственный университет.

Защита состоится «____» ______________________ 201__ г. в _________ часов на заседании диссертационного совета Д 212.081.24 при Казанском (Приволжском) федеральном университете в конференц-зале Научной библиотеки им. Н. И. Лобачевского по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35.

Автореферат разослан «____» ______________________ 201__ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.24
кандидат физико-математических наук,
доцент А. И. Еникеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена одному из разделов функциональной алгебры — теории полуколец непрерывных функций. Исследуются изоморфизмы решеток подалгебр полуколец $C^+(X)$ всех непрерывных неотрицательных действительнозначных функций, определенных на топологических пространствах X.

Полукольца непрерывных функций возникли в рамках классической теории колец $C(X)$ всех непрерывных действительнозначных функций на топологических пространствах X, изучение которых началось во второй половине 30-ых годов 20 века с работ М. Стоуна 1937 г.[1], И. М. Гельфанда и А. Н. Колмогорова 1939 г.[2], Э. Хьюитта 1948 г.[3], а в 1960 г. вышла монография[4] Л. Гиллмана и М. Джерисона, подытожившая первые двадцать лет развития теории колец непрерывных функций. Более подробно развитие теории колец непрерывных функций отражено в обзорах Е. М. Вечтомова[5,6,7,8] и М. Хенриксена[9,10]. Видимо, впервые понятие полукольца в явном виде появилось в 1934 г. в статье[11] Г. С. Вандивера. Однако, как отмечает К. Глазек[12], фактически полукольца рассматривались с конца 19 века в работах, связанных с изучением идеалов

[1]Stone M. Applications of the theory of boolean rings to general topology // Trans. Amer. Math. Soc. 1937. Vol. 41. № 3. P. 375–481.

[2]Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах // Доклады АН СССР. 1939. Т. 22. № 1. С. 11–15.

[3]Hewitt E. Rings of real-valued continuous functions. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. Vol. 64. № 1. P. 45–99.

[4]Gillman L., Jerison M. Rings of Continuous Functions. University Series in Higher Mathematics. Princeton: Van Nostrand, 1960. Newer edition: Graduate Texts in Math. Berlin: Springer-Verlag, Vol. 43. 1976.

[5]Вечтомов Е. М. Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНИТИ, 1990. Т. 28. С. 3–46.

[6]Вечтомов Е. М. Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 29. С. 119–191.

[7]Vechtomov E. M. Rings and sheaves // J. Math. Sciences (USA). 1995. Vol. 74. № 1. P. 749–798.

[8]Vechtomov E. M. Rings of continuous functions with values in topological division ring // J. Math. Sciences (USA). 1996. Vol. 78. № 6. P. 702–753.

[9]Henriksen M. Rings of continuous functions from an algebraic point of view. Ordered algebraic structures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989.

[10]Henriksen M. Rings of continuous functions in the 1950s. Handbook of the history of general topology. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. Vol. 1. P. 243–253.

[11]Vandiver H. S. Note on a simple type of algebra in which cancellation law of addition does not hold // Bull. Amer. Math. Soc. 1934. Vol. 40. P. 914–920.

[12]Glazek K. A Short Guide to the Literature on Semirings and Their Applications in Mathematics and Computer Science. Berlin: Springer, 2002. 400 p.

колец[13,14] и с вопросами аксиоматики натуральных и неотрицательных рациональных чисел[15,16]. В настоящее время теория полуколец является активно развивающимся разделом современной алгебры. Полукольца имеют приложения в дискретной математике, компьютерной алгебре, идемпотентном анализе, теории оптимального управления и других разделах математики. Отметим книги Голана[17,18], Хебиша и Вейнерта[19], содержащие богатый материал по теории полуколец, множество примеров и обширную библиографию. Многие полукольца имеют хорошие функциональные (пучковые) представления[20]. Это делает актуальным изучение полуколец непрерывных функций. Систематическим изучением колец, полуколец и полуполей непрерывных функций занимаются Е. М. Вечтомов и его ученики. Результаты этих исследований отражены в диссертациях[21,22,23,24,25,26]. Отметим, что планомерное изучение свойств полуколец непрерывных функций начато в работе В. И. Варанкиной, Е. М. Вечтомова и И. А. Семёновой 1998 г.[27]. Имеются обзоры, посвященные полукольцам непре-

---

[13] Dedekind R. Uber die Theorie ganzen algebraischen Zahlen // Supplement XI to P.G. Lejeune Dirichlet: Vorlesungen Uber Zahlentheorie. 4 Anfl. Braunschweig: Druck und Verlag, 1894.

[14] Macaulay F. S. Algebraic Theory of Modular Sistems. Camrridge: Cambridge Univ. Press, 1916.

[15] Hilbert D. Uber den Zahlbergriff // Jahresber. Deutsch. Math. Verein, 1899. Vol. 8. P. 180–184.

[16] Huntington E.V. Complete sets of postulates for the theory of positive integral and positive rational numbers // Trans. Amer. Math. Soc. 1902. Vol. 3. P. 280–284.

[17] Golan J. S. Semirings and their applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

[18] Golan J. S. Semirings and affine equations over them: theory and applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.

[19] Hebisch U., Weinert H. J. Semirings: algebraic theory and applications in computer science // World Scientific. Singapure, 1998.

[20] Чермных В. В. Функциональные представления полуколец. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2010. 224 с.

[21] Варанкина В. И. Максимальные идеалы и делимость в полукольцах непрерывных функций: дис. ... канд. физ.-матем. наук. Киров, 1996. 91 с.

[22] Подлевских М. Н. Полукольца непрерывных функцией с топологией поточечной сходимости: дис. ... канд. физ.-матем. наук. Киров, 1999. 88 с.

[23] Семенова И. А. Конгруэнции на полукольцах непрерывных функций: дис. ... канд. физ.-матем. наук. Киров, 1998. 78 с.

[24] Чермных В. В. Функциональные представления полуколец и полумодулей: дис. ... д-ра физ.-матем. наук. Киров, 2007. 234 с.

[25] Чупраков Д. В. Конгруэнции на полукольцах и полуполях непрерывных числовых функций: дис. ... канд. физ.-матем. наук. Киров, 2010. 106 с.

[26] Широков Д. В. Идеалы в полукольцах непрерывных функций: дис. ... канд. физ.-матем. наук. Киров, 2005. 83 с.

[27] Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семенова И. А. Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы,конгруэнции // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. Вып. 2. С. 493–510.

рывных функций[28,29].

При исследовании полуколец большое внимание уделяется методам и результатам, которые удается перенести из теории колец. Существенное место в теории колец $C(X)$ непрерывных функций занимает круг вопросов, связанных с попыткой выяснить, насколько топологическое пространство X или отдельные его свойства определяются теми или иными алгебраическими свойствами кольца $C(X)$ и связанных с ним алгебраических систем (см. обзоры[30,31]). Сюда же относится *задача определяемости топологических пространств.* Определяемость топологического пространства X в классе K топологических пространств производной алгебраической структурой $A(X)$ означает, что для произвольного топологического пространства Y из K изоморфизм $A(Y) \cong A(X)$ влечет гомеоморфизм $Y \approx X$. В 1939 г. И. М. Гельфанд и А. Н. Колмогоров[32] доказали одну из первых теорем определяемости топологических пространств: произвольный компакт X определяется кольцом $C(X)$. Эта теорема послужила образцом для различных обобщений и углублений как в сторону расширения класса определяемых пространств с класса компактов, так и в сторону ослабления структуры $C(X)$ и привлечения новых объектов $A(X)$. Так, в 1948 г. Э. Хьюитт[33] установил определяемость произвольного хьюиттовского пространства X кольцом $C(X)$, в 1988 г. Е. М. Вечтомов[34] доказал определяемость любого хьюиттовского пространства X решеткой $\mathrm{Id}\, C(X)$ всех идеалов кольца $C(X)$, а в 1997 г. им доказана[35] определяемость всякого хьюиттовского пространства X решеткой $\mathbb{A}(C(X))$ всех подалгебр кольца $C(X)$.

[28] Artamonova I. I., Chermnykh V. V., Mikhalev A. V., Varankina V. I., Vechtomov E. M.. Semirings: sheaves and continuous functions // Semigroups with applications, including simigroup rings. Sankt-Petersburg, 1999. P. 23–58.

[29] Вечтомов Е. М. Полукольца непрерывных отображений // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2004. № 10. С. 57–64.

[30] Вечтомов Е. М. Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНИТИ, 1990. Т. 28. С. 3–46.

[31] Вечтомов Е. М. Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 29. С. 119–191.

[32] Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах // Доклады АН СССР. 1939. Т. 22. № 1. С. 11–15.

[33] Hewitt E. Rings of real-valued continuous functions. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. Vol. 64. № 1. P. 45–99.

[34] Вечтомов Е. М. Определяемость E-компактных пространств частично упорядоченными множествами идеалов колец непрерывных функций // Абелевы группы и модули. Томск, 1988. № 7. С. 20–30.

[35] Вечтомов Е. М. Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // Математические заметки. 1997. Т. 62. Вып. 5. С. 687–693.

Заметим, что для всякого топологического пространства X кольцо $C(X) = C^+(X) - C^+(X)$ есть кольцо разностей полукольца $C^+(X)$, а полукольцо $C^+(X)$ совпадает с множеством всевозможных квадратов элементов кольца $C(X)$. Поэтому любой изоморфизм полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$ однозначно продолжается до изоморфизма колец $C(X)$ и $C(Y)$, и обратно, любой изоморфизм колец $C(X)$ и $C(Y)$ является продолжением некоторого единственного изоморфизма — его ограничения на $C^+(X)$ — полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$. Следовательно, задача определяемости произвольного хьюиттовского пространства X полукольцом $C^+(X)$ равносильна задаче определяемости хьюиттовского пространства X кольцом $C(X)$. Для решеток подалгебр кольца $C(X)$ и полукольца $C^+(X)$ подобной связи уже нет. В связи с этим Е. М. Вечтомовым[36] была поставлена проблема: *верно ли, что любое хьюиттовское пространство X определяется решеткой $\mathbb{A}(C^+(X))$ всех подалгебр полукольца $C^+(X)$*? В главе 1 диссертации дается положительное решение этой проблемы.

Помимо решетки $\mathbb{A}(C^+(X))$ с полукольцом $C^+(X)$ естественным образом связаны и другие алгебраические структуры. Так, в статье[37] рассматривалась решетка $\mathrm{Id}\, C^+(X)$ всех идеалов полукольца $C^+(X)$. Согласно предложению 2.2 этой статьи для произвольных топологических пространств X и Y изоморфизм решеток $\mathrm{Id}\, C^+(X)$ и $\mathrm{Id}\, C^+(Y)$ равносилен изоморфизму полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$. Отсюда, в частности, следует определяемость произвольного хьюиттовского пространства X решеткой $\mathrm{Id}\, C^+(X)$. И. А. Семеновой[38] доказана определяемость хьюиттовского пространства X решеткой $\mathrm{Con}\, C^+(X)$ всех конгруэнций полукольца $C^+(X)$.

Уместно отметить причину, по которой при решении многих задач теории колец и полуколец непрерывных функций на X пространство X естественно считать хьюиттовским (топологическое пространство называется *хьюиттовским*, если оно гомеоморфно замкнутому подпространству некоторой тихоновской степени пространства $\mathbb{R}$). Это связано с тем, что для произвольного топо-

[36]Вечтомов Е. М. Введение в полукольца. Киров: ВГПУ, 2000. 44 с.

[37]Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семенова И. А. Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы,конгруэнции // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. Вып. 2. С. 493–510.

[38]Семенова И. А. Определяемость хьюиттовских пространств X решеткой конгруэнций полуколец непрерывных неотрицательных функций на X // Вестник Вятского государственного педагогического университета. 1999. № 1. С. 20–23.

логического пространства X существуют тихоновское пространство τX (называемое иногда *тихоновизацией* пространства X) и хьюиттовское пространство $\nu\tau X$ (теоремы 3.9 и 8.7 книги Гиллмана и Джерисона[39]), для которых канонически изоморфны кольца $C(X)$, $C(\tau X)$ и $C(\nu\tau X)$, а значит, и соответствующие им полукольца $C^+(X)$, $C^+(\tau Z)$ и $C^+(\nu\tau X)$. Кроме того, хьюиттовское расширение $\nu\tau X$ тихоновского пространства τX однозначно (с точностью до гомеоморфизма над τX) характеризуется следующими условиями: $\nu\tau X$ — хьюиттовское пространство, τX — плотное подпространство в $\nu\tau X$ и все функции из $C(\tau X)$ продолжаются (единственным образом) до функций из $C(\nu\tau X)$.

Вслед за проблемой определяемости пространств X той или иной алгебраической структурой $A(X)$ встает *задача описания изоморфизмов* структур $A(X)$. Произвольный изоморфизм решеток всех подалгебр однотипных алгебр называется *решеточным* (или *структурным*) *изоморфизмом* данных алгебр. В главе 2 диссертации нами описаны решеточные изоморфизмы полуколец $C^+(X)$ как для решетки подалгебр $\mathbb{A}(C^+(X))$, так и для ее подрешетки $\mathbb{A}_1(C^+(X))$ всех подалгебр с единицей.

Ключевую роль в работе как в идейном, так и в техническом плане играют однопорожденные подалгебры с единицей. Это связано с тем, что изучение изоморфизмов решетки $\mathbb{A}(C^+(X))$ во многом сводится к изучению изоморфизмов ее подрешетки $\mathbb{A}_1(C^+(X))$. В свою очередь, каждая подалгебра $A \in \mathbb{A}_1(C^+(X))$ есть точная верхняя грань включенных в нее однопорожденных подалгебр $[f]$ с единицей. Поэтому образ подалгебры A при изоморфизме полностью определяется образами подалгебр $[f]$, следить за которыми весьма удобно. Для этого мы связываем с полукольцом $[f]$ решетку $\mathbb{A}_f$ всех подалгебр с единицей, которые включены в $[f]$. Полное описание изоморфизмов подалгебр $[f]$ и $[g]$ и соответствующих им решеток $\mathbb{A}_f$ и $\mathbb{A}_g$ дано в главе 3.

Цель работы заключается в решении задачи определяемости любого хьюиттовского пространства X как решеткой $\mathbb{A}(C^+(X))$ всех подалгебр полукольца $C^+(X)$ непрерывных неотрицательных действительнозначных функций на X, так и ее подрешеткой $\mathbb{A}_1(C^+(X))$ всех подалгебр с единицей; описании решеточных изоморфизмов полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$ для решеток $\mathbb{A}(C^+(X))$ и

[39] Gillman L., Jerison M. Rings of Continuous Functions. University Series in Higher Mathematics. Princeton: Van Nostrand, 1960. Newer edition: Graduate Texts in Math. Berlin: Springer-Verlag, Vol. 43. 1976.

$\mathbb{A}(C^+(Y))$ всех подалгебр и решеток $\mathbb{A}_1(C^+(X))$ и $\mathbb{A}_1(C^+(Y))$ всех подалгебр с единицей.

Методы исследования. В работе применяются методы и результаты теории колец и полуколец непрерывных функций, теории решеток, универсальной алгебры и общей топологии. Для исследования изоморфизмов решеток подалгебр полуколец непрерывных функций эффективна разработанная автором техника однопорожденных подалгебр.

Основные результаты:

- Доказана определяемость любого хьюиттовского пространства X как решеткой $\mathbb{A}(C^+(X))$ всех подалгебр полукольца $C^+(X)$, так и ее подрешеткой $\mathbb{A}_1(C^+(X))$ всех подалгебр с единицей полукольца $C^+(X)$ (теоремы 3.1 и 3.2).
- Показано, что для произвольных топологических пространств X и Y любой изоморфизм решеток $\mathbb{A}(C^+(X))$ и $\mathbb{A}(C^+(Y))$ (за исключением случая $|\tau X| = 2$), $\mathbb{A}_1(C^+(X))$ и $\mathbb{A}_1(C^+(Y))$ индуцируется однозначно определенным изоморфизмом полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$ (теоремы 4.1 и 5.1).
- Описаны изоморфизмы однопорожденных полуколец $[f]$ и $[g]$, где $f \in C^+(X), g \in C^+(Y)$ (теорема 6.1); установлено, что изоморфизмы решеток $\mathbb{A}_f$ и $\mathbb{A}_g$ всех подалгебр с единицей полуколец $[f]$ и $[g]$ индуцируются изоморфизмами полуколец $[f]$ и $[g]$ (теорема 6.2).
- Доказано, что группа автоморфизмов решетки $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}^+[x])$ всех подалгебр с единицей полукольца многочленов $\mathbb{R}^+[x]$ изоморфна мультипликативной группе всех положительных действительных чисел (теорема 10.2).
- Для получения и доказательства результатов разработана и применяется оригинальная техника однопорожденных подалгебр, представляющая самостоятельный интерес.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Личный вклад автора. В диссертации изложены результаты, полученные лично автором. Постановка задач и план исследования выполнены совместно с научным руководителем Е. М. Вечтомовым.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и развитые в работе методы могут быть использованы для дальнейших исследований в области колец и полуколец непрерывных функций, а также для чтения специальных курсов для студентов и аспирантов, специализирующихся в указанных областях.

Апробация. Результаты диссертации докладывались на Международной алгебраической конференции «Мальцевские чтения — 2009», посвященной 100-летию со дня рождения А. И. Мальцева (Новосибирск, август 2009 г.), на Восьмой и Девятой молодежной научной школе-конференции «Лобачевские чтения» (Казань, ноябрь 2009 г. и октябрь 2010 г.), на Межрегиональном научном семинаре, посвященном 100-летию со дня рождения академика В. В. Новожилова (Сыктывкар, февраль 2010 г.), на XIII Международной научной конференции имени академика М. Кравчука (Киев, май 2010 г.), на Международном алгебраическом симпозиуме, посвященном 80-летию кафедры высшей алгебры МГУ и 70-летию А. В. Михалева (Москва, ноябрь 2010 г.), на семинаре по алгебре и топологии Института математики и механики Уральского отделения РАН (Екатеринбург, апрель 2011 г.), на семинаре кафедры алгебры и математической логики КФУ (Казань, май 2011 г.), регулярно на алгебраическом семинаре г. Кирова при ВятГГУ.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 9 работ (список публикаций приведен в конце автореферата), четыре из которых в соавторстве с научным руководителем Е. М. Вечтомовым. Две работы опубликованы в изданиях, рекомендуемых ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 10 параграфов, списка литературы и предметного указателя. Текст диссертации изложен на 136 страницах. Список литературы содержит 50 наименований.

Содержание работы

Во **введении** излагается история вопроса и актуальность темы диссертации, приведены формулировки основных результатов, описана структура работы.

Глава 1 содержит доказательство определяемости произвольного хьюиттовского пространства X как решеткой $\mathbb{A}(C^+(X))$ всех подалгебр полукольца $C^+(X)$, так и ее подрешеткой $\mathbb{A}_1(C^+(X))$ всех подалгебр с единицей полукольца $C^+(X)$.

Полукольцо есть коммутативный моноид по сложению с нейтральным элементом нуль 0 и полугруппа по умножению с выполнением законов дистрибутивности умножения относительно сложения и дополнительной (по сравнению с кольцевым случаем) аксиомы: $s0 = 0s = 0$ для всех элементов s полукольца.

Пусть X — произвольное топологическое пространство и $\mathbb{R}^+$ $(\mathbb{P})$ — множество всех неотрицательных (положительных) действительных чисел. Множество всех непрерывных неотрицательных действительнозначных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения функций образует коммутативное полукольцо $C^+(X)$ с единицей. *Подалгеброй* в полукольце $C^+(X)$ называется произвольное его подполукольцо, выдерживающее умножение на константы из $\mathbb{R}^+$. Обозначим через $\mathbb{A}(C^+(X))$ *решетку* всех *подалгебр* полукольца $C^+(X)$ относительно включения $\subseteq$, а через $\mathbb{A}_1(C^+(X))$ ее подрешетку, состоящую из всех подалгебр с единицей. Минимальные (ненулевые) подалгебры в $C^+(X)$ — это атомы решетки $\mathbb{A}(C^+(X))$, а максимальные (собственные) подалгебры — ее коатомы. Примером минимальной подалгебры полукольца $C^+(X)$ служит подалгебра констант $\mathbb{R}^+$.

В параграфе 1 подалгебра $\mathbb{R}^+$ описана в терминах решетки $\mathbb{A}(C^+(X))$.

Предложение 1.1. *Минимальная подалгебра $A \in \mathbb{A}(C^+(X))$ совпадает с $\mathbb{R}^+$ $\iff$ для любой минимальной подалгебры $B \in \mathbb{A}(C^+(X))$, отличной от A, подалгебра $A \vee B$ содержит ровно две минимальные подалгебры из $\mathbb{A}(C^+(X))$ (именно A и B).*

Из предложения 1.1 следует, что ограничение изоморфизма решеток $\mathbb{A}(C^+(X))$ и $\mathbb{A}(C^+(Y))$ на решетку $\mathbb{A}_1(C^+(X))$ будет изоморфизмом решеток $\mathbb{A}_1(C^+(X))$ и $\mathbb{A}_1(C^+(Y))$. Поэтому определяемость хьюиттовского пространства X решеткой $\mathbb{A}(C^+(X))$ будет следовать из определяемости его решеткой $\mathbb{A}_1(C^+(X))$. Это позволяет сосредоточиться на работе с решеткой $\mathbb{A}_1(C^+(X))$.

Наименьшую подалгебру $A \in \mathbb{A}(C^+(X))$, содержащую функцию f, назовем *однопорожденной* и обозначим $\langle f \rangle$. Она состоит из всевозможных многочленов из $\mathbb{R}^+[f]$ без свободных членов. Подалгебру $[f] = \langle f \rangle \vee \mathbb{R}^+ = \langle f \rangle + \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+[f]$ с единицей также будем называть *однопорожденной.*

Для доказательства основной теоремы 3.1 главы 1 применяется оригинальная техника однопорожденных подалгебр, развиваемая в параграфах 1 и 2. Отправной точкой служит теорема 1.1, содержащая решеточную характеризацию однопорожденных подалгебр.

Теорема 1.1. *Однопорожденные подалгебры решеток* $\mathbb{A}(C^+(X))$ *и* $\mathbb{A}_1(C^+(X))$ *— это в точности* $\vee$*-неразложимые компактные их элементы.*

В параграфе 2 показано, что если X — компакт (то есть компактное хаусдорфовое пространство), то в $\mathbb{A}_1(C^+(X))$ имеется решеточная характеризация подалгебр $M_x \vee \mathbb{R}^+ = M_x + \mathbb{R}^+$, которые образованы всеми функциями из $C^+(X)$, принимающими в точках $x \in X$ наименьшее значение. Для этого предварительно вводится несколько новых типов подалгебр полукольца $C^+(X)$, а затем изучаются их свойства.

Теорема 2.2. *Для произвольного компакта* X *в* $\mathbb{A}_1(C^+(X))$ *имеется решеточная характеризация подалгебр* $M_x + \mathbb{R}^+, x \in X$.

Опираясь на эту теорему, получаем главный результат главы 1:

Теорема 3.1. *Всякое хьюиттовское пространство* X *определяется решеткой* $\mathbb{A}_1(C^+(X))$.

Из теоремы 3.1 получаем следующие две теоремы:

Теорема 3.2. *Всякое хьюиттовское пространство* X *определяется решеткой* $\mathbb{A}(C^+(X))$.

Теорема 3.3. *Для произвольных топологических пространств* X *и* Y *эквивалентны следующие утверждения:*

1) $\mathbb{A}(C^+(X)) \cong \mathbb{A}(C^+(Y))$;
2) $\mathbb{A}_1(C^+(X)) \cong \mathbb{A}_1(C^+(Y))$;
3) $C^+(X) \cong C^+(Y)$.

Глава 2 содержит описание решеточных изоморфизмов полуколец $C^+(X)$ для решеток подалгебр $\mathbb{A}(C^+(X))$ и $\mathbb{A}_1(C^+(X))$. Первый параграф главы посвящен изоморфизмам решеток $\mathbb{A}_1(C^+(X))$. Главным результатом служит

Теорема 4.1. *Для произвольных топологических пространств X и Y любой изоморфизм решеток $\mathbb{A}_1(C^+(X))$ и $\mathbb{A}_1(C^+(Y))$ индуцируется однозначно определенным изоморфизмом полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$.*

Этот результат существенно используется для описания изоморфизмов решеток $\mathbb{A}(C^+(X))$ и $\mathbb{A}(C^+(Y))$. Однако сказать, что теорема 4.1 решает задачу в полной мере, нельзя; случай $|\tau X| = 2$ приходится рассматривать отдельно.

Теорема 5.1. *Для произвольных топологических пространств X и Y любой изоморфизм решеток $\mathbb{A}(C^+(X))$ и $\mathbb{A}(C^+(Y))$ индуцируется однозначно определенным изоморфизмом полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$ за исключением случая, когда $\tau X = \{x, y\}$ — несвязное двоеточие: в этом случае существует взаимно-однозначное соответствие между изоморфизмами решеток $\mathbb{A}(C^+(X))$ и $\mathbb{A}(C^+(Y))$ и парами автоморфизмов (γ_x, γ_y) цепи $[0, 1]$.*

Глава 3 посвящена описанию изоморфизмов однопорожденных полуколец $[f]$ и $[g]$ с единицей, где $f \in C^+(X), g \in C^+(Y)$, и решеток $\mathbb{A}_f$ и $\mathbb{A}_g$ всех подалгебр с единицей полуколец $[f]$ и $[g]$.

Функцию $f \in C^+(X)$ будем называть *n-значной*, если $|\operatorname{Im} f| = n, n \in \mathbb{N}$, и *конечнозначной* (*бесконечнозначной*), если образ $\operatorname{Im} f$ конечен (бесконечен).

Теорема 6.1. *Для произвольных функций $f \in C^+(X)$ и $g \in C^+(Y)$ следующие условия эквивалентны:*

1) *α — изоморфизм полукольца $[f]$ на полукольцо $[g]$;*

2) *выполняется одно из следующих условий:*

а) *f и g — константы. Тогда $[f] \equiv \mathbb{R}^+ \equiv [g]$ и α — тождественное отображение.*

б) *f и g — двухзначные положительные функции. В этом случае $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(ag^n + b)$ для некоторых $n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{P}$; α — отображение полукольца $[f]$ на полукольцо $[g]$, порождаемое подстановкой $f \mapsto ag^n + b$.*

в) *f и g — двухзначные функции, обращающиеся в нуль. В этом случае $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} pg$ для некоторого $p \in \mathbb{P}$; α — отображение полукольца $[f]$ на полукольцо $[g]$, порождаемое подстановкой $f \mapsto pg$.*

г) *f и g — n-значные функции, $n \geqslant 3$, такие, что $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} pg$ для некоторого $p \in \mathbb{P}$; α — отображение полукольца $[f]$ на полукольцо $[g]$, порождаемое подстановкой $f \mapsto pg$.*

д) *f и g — бесконечнозначные функции, α — отображение полукольца $[f]$ на полукольцо $[g]$, порождаемое подстановкой $f \mapsto pg, p \in \mathbb{P}$.*

Главным результатом главы 3 является

Теорема 6.2. *Изоморфизмы решеток $\mathbb{A}_f$ и $\mathbb{A}_g$, где $f \in C^+(X), g \in C^+(Y)$, индуцируются изоморфизмами полуколец $[f]$ и $[g]$.*

Для ее доказательства используются свойства однопорожденных подалгебр. Так, в параграфе 7 доказывается

Предложение 7.4. *Для любой функции $f \in C^+(X)$ в $\mathbb{A}_f$ имеется решеточная характеризация того, является функция f бесконечнозначной или нет, а для конечнозначной функции f решеточно можно найти число элементов ее образа и установить наличие в нем нуля, если f отлична от константы.*

Данное предложение показывает, что изоморфизм решеток $\mathbb{A}_f$ и $\mathbb{A}_g$ влечет $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g|$. Это позволяет решать вопрос об изоморфизме решеток $\mathbb{A}_f$ и $\mathbb{A}_g$ перебором по мощности образа функции f. Случай $|\operatorname{Im} f| \leqslant 2$ тривиален. Ключевым является случай трехзначной функции f, который рассматривается в параграфе 8. К нему сводится описание изоморфизмов решеток $\mathbb{A}_f$ для случая $|\operatorname{Im} f| = n \geqslant 4$. Данная редукция представлена в параграфе 9.

Если функции f и g — бесконечнозначные, то полукольца $[f]$ и $[g]$ изоморфны полукольцу многочленов $\mathbb{R}^+[x]$. Поэтому описание изоморфизмов решеток $\mathbb{A}_f$ и $\mathbb{A}_g$ сводится к описанию автоморфизмов решетки $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}^+[x])$. Данная задача решается в параграфе 10. Результатом служит

Теорема 10.1. *Автоморфизмы решетки $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}^+[x])$ всех подалгебр с единицей полукольца многочленов $\mathbb{R}^+[x]$ порождаются автоморфизмами самого полукольца, которые, в свою очередь, получаются заменами $x \mapsto px$, $p \in \mathbb{P}$.*

Из теоремы 10.1 получаем следующий результат:

Теорема 10.2. *Группа автоморфизмов решетки $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}^+[x])$ всех подалгебр с единицей полукольца многочленов $\mathbb{R}^+[x]$ изоморфна мультипликативной группе положительных действительных чисел.*

Автор глубого благодарен своему научному руководителю профессору Евгению Михайловичу Вечтомову за постановку задач и всестороннюю поддержку.

Работы автора по теме диссертации

1. Вечтомов Е. М., Сидоров В. В. О решеточном изоморфизме полуколец непрерывных функций // Международная алгебраическая конференция «Мальцевские чтения–2009», посвященная 100-летию со дня рождения Анатолия Ивановича Мальцева: тезисы докладов. (24–28 августа 2009 г., г. Новосибирск). Новосибирск: Мат. ин-т им. С. Л. Соболева, НГУ, 2009. С. 113.
2. Вечтомов Е. М., Сидоров В. В. Определяемость полуколец непрерывных функций решеткой их подалгебр // Вестник Сыктывкарского университета. Сер.1: Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 11. С. 112–125.
3. Вечтомов Е. М., Сидоров В. В. Об изоморфизме решеток подалгебр полуколец непрерывных функций // Международная конференция «Алгебра, логика и приложения»: тезисы докладов. (19–25 июля 2010 г., г. Красноярск). Красноярск: СФУ, 2010. С. 18–19.
4. Сидоров В. В. О строении решеточных изоморфизмов полуколец непрерывных функций // Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского. Казань: Издательство Казанского математического общества, 2009. Т. 39. С. 339–341.
5. Сидоров В. В. Об изоморфизме однопорожденных подалгебр полуколец непрерывных функций // XIII Международная научная конференции им. акад. М. Кравчука: материалы конференции. (13–15 мая 2010 г., г. Киев). Киев: Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», 2010. Т. 2, С. 246.
6. Сидоров В. В. О строении изоморфизмов решеток подалгебр однопорожденных подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций // Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского. Казань: Издательство Казанского математического общества, 2010. Т. 40. С. 304–307.
7. Сидоров В. В. Строение решеточных изоморфизмов полуколец, порожденных одной неотрицательной функцией // Вестник Сыктывкарского университета. Сер.1: Математика. Механика. Информатика. 2011. Вып. 13. С. 11–36.

Статьи в изданиях, рекомендуемых ВАК

8. Вечтомов Е. М., Сидоров В. В. Изоморфизмы решеток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т.16. Вып. 3. С. 63–103.
9. Сидоров В. В. Группа автоморфизмов решетки всех подалгебр полукольца многочленов над полуполем неотрицательных действительных чисел // Известия вузов. Математика. 2011. № 4. С. 104–107.

Подписано в печать ______ 201__ г.
Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$.
Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 1,00.
Тираж 100 экз.
Заказ № ____

Издательство Вятского государственного гуманитарного университета,
610002, г. Киров, ул. Красноармейская, 26

Издательский центр Вятского государственного гуманитарного университета,
610002, г. Киров, ул. Ленина, 111, т. (8332) 673-674